Examen de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas (Metodología).
21 de Diciembre de 1996.

1. Sea f una función entera no constante. Dado $w \in \mathbb{C}$, justifíquese que se cumple alguna de las dos afirmaciones:

   a) La ecuación $f(z) = w$ tiene solución.

   b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

2. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1, |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$, y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω verificando que $f(z) = 0$ siempre que $z \in \overline{\Omega}$ y $\mathrm{Re}\, z = 1$. Pruébese que $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{\Omega}$.

   Sugerencia: considérese la función $g(z) = f(z) f(iz) f(-z) f(-iz)$.

3. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [a, b, b+\pi i, a+\pi i, a]$ $(a < 0 < b)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{x} + e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

   donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

4. Sea Ω un dominio acotado en el plano, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω verificando que $|f(z)| = 1$ siempre que $z \in Fr(\Omega)$. Supuesto que f no es constante, pruébese que $f(\Omega) = D(0,1)$.

   Sugerencia: si $\varphi \in Aut(D(0,1))$, la función $\varphi \circ f$ está en las mismas condiciones que f.

5. Enunciar y demostrar el “Teorema de la aplicación abierta".

6. Enunciar y demostrar el “Teorema de los residuos".